Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2017) p. 41-48
DOI: 10.2436/10.2006.03.6

ALGUNOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DEL SIGLO XVI Y SU APLICACIÓN AL AULA DE SECUNDARIA

PEDRO JOSÉ HERRERO PIÑEYRO;[1] ANTONIO LINERO BAS; ANTONIO MELLADO ROMERO[3]
[1] IES RICARDO ORTEGA, FUENTE ÁLAMO (MURCIA) - *pjherrero22@gmail.com*.
[2] UNIVERSIDAD DE MURCIA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS - *lineroba@um.es*.
[3] IES FRANCISCO SALZILLO, ALCANTARILLA (MURCIA) - *antonio.mellado2@um.es*.

Palabras clave: *ecuaciones numéricas, siglo xvi, Cardano, Stevin, Chuquet*

Some Methods of Numerical Resolution of Equations of the 16th Century and their Applications in the High School Classroom

Summary: *In this note, we give a brief account on numerical methods developed at 16th century, focussing our attention on three works. The first one is 'L'arismethique nouvellement composee', by Estienne de la Roche, published in 1520. De la Roche took his method from the 'Triparty' of his master Nicolas Chuquet (who wrote it in the form of a manuscript lost until 1881). Secondly, we describe the «Regula Aurea» exposed by Girolamo Cardano in his celebrated 'Ars Magna', published in 1545. And finally, we analyse a method given by Simon Stevin in 1594, resembling the bisection process, in a pamphlet entitled 'Appendice Algébraique de Simon Stevin, de Bruges, contenant regle générale de toutes équations'. Taking into account the mentioned methods, and their history, we propose some activities to be developed in the High School mathematics classroom, so as to design the respective algorithms associated to the methods or to stress the importance of the so-called process of algebrization of the mathematics.*

Key words: *numerical equations, 16th century, Cardano, Stevin, Chuquet*

Introducción

En el currículum de las matemáticas de secundaria y bachillerato encontramos la resolución de ecuaciones en esas etapas educativas (CARM, 2015). En particular, la resolución de ecuaciones polinómicas hace referencia, salvo casos especiales, a las ecuaciones hasta el grado dos, que se resuelven por radicales, a las ecuaciones bicuadradas, que se reducen a cuadráticas mediante un cambio de variable, y a las de grado superior a dos, que se resuelven descomponiéndolas en factores de grado máximo dos. Las ecuaciones polinómicas se tienen que presentar a los alumnos «preparadas» para que se ajusten bien a los tipos mencionados antes. Esto produce en el alumno una visión de una matemática descontextualizada de la realidad.

La inclusión de métodos numéricos nos permitirá introducir ecuaciones polinómicas que no se pueden resolver mediante los métodos clásicos enseñados en secundaria y bachillerato y nos ayudará a mostrar a los alumnos una visión más realista de las matemáticas. Además, podremos abordar otros conceptos como el de aproximación de números reales o cálculo del error cometido en dicha aproximación, así como introducir las nuevas tecnologías en el aula mediante la programación de diferentes métodos numéricos.

Para llevar a cabo esta tarea, será fundamental realizar una elección adecuada de los métodos numéricos, mostrándolos contextualizados en su época. La historia de las matemáticas nos servirá como herramienta pedagógica que nos proporcionará un enriquecimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Fauvel & Maanen, 2000; Katz & Tzanakis, 2011), transmitiendo las matemáticas a los alumnos como una ciencia construida mediante un trabajo colectivo y en continua evolución (Massa, 2014). Además, el uso de fuentes originales nos servirá para contextualizar los métodos y para elaborar tareas divertidas, gratificantes y enriquecedoras, tanto para los profesores como para los alumnos (Katz & Tzanakis, 2011: cap. 1).

En el siglo XVI se produce en Europa un crecimiento considerable de textos impresos de álgebra que difunden el método algebraico para resolver problemas, acentuando la importancia de la resolución de una ecuación como último paso de dicho método. Se conocían los métodos de resolución por radicales de las ecuaciones hasta el grado cuatro, publicados por primera vez en 1545 por Cardano en su *Ars Magna.* Aparte de que no se conocía un método general para resolver ecuaciones de grado mayor que cuatro, la resolución por radicales se topaba con dos problemas: (1) en algunos casos de resolución de ecuaciones cúbicas, las llamadas cúbicas irreducibles, el proceso de resolución por radicales tropezaba con la extracción de raíces cuadradas de números negativos; (2) la complejidad de los métodos de extracción de raíces cuadradas y cúbicas hacía el proceso muy lento y pesado. Esto provocó, sobre todo a partir de la obra de Cardano, que gran parte de los textos de álgebra incluyeran un apartado dedicado a métodos de resolución numérica de ecuaciones. Métodos recogidos en las obras de Chuquet (1484), Pacioli (1494), Cardano (1545), Stevin (1585), Viète (1600), Pitiscus (1612) o Bürgi (1620) entre otros (Norgaard, 1922).

Entre estas obras, nos parecen relevantes para usar en el aula los métodos de Chuquet, Cardano y Stevin por diferentes razones: (1) las obras originales son fácilmente accesibles, (2) los métodos usados son sencillos, (3) son métodos programables mediante ordenador y (4) recorren el siglo XVI, lo que nos va a permitir incidir en la notación usada para expresar las ecuaciones y mostrar la evolución del lenguaje simbólico durante este siglo. Analizaremos estos tres métodos con el objetivo de acentuar las posibilidades de usarlos en el aula para introducir diferentes algoritmos de resolución numérica de ecuaciones y resaltar la importancia del lenguaje simbólico en las matemáticas.

El método de Chuquet

Chuquet nació en París alrededor de 1450, estudió medicina y se trasladó a Lyon sobre 1480, donde trabajó como copista preparando documentos comerciales relacionados con las leyes. El talento de

Chuquet quedó plasmado en su trabajo con los nuevos numerales indo-arábigos y las herramientas de cálculo que proporcionaban (Flegg *et al.*, 1985).

Es conocido, sobre todo, por su libro *Triparty en la Science des Nombres* (Chuquet, 1484). Este trabajo no llegó a publicarse, y el manuscrito se perdió años más tarde. En 1881, Aristide Marre encuentra el manuscrito en la Biblioteca Nacional de París y realiza una edición en francés (Marre, 1880). Gran parte de los procedimientos algebraicos descritos por Chuquet en su *Triparty* se dieron a conocer en Europa a través de la obra *L'arismethique nouvellement composee* publicada en 1520, y posteriormente en 1538, por Estienne de La Roche (1470-1530). En particular, el método de resolución numérica de ecuaciones que Chuquet describe en el *Triparty* será reproducido por La Roche en *L'arismethique*, y por lo tanto se dará a conocer durante el siglo XVI. El método se basa en una regla, que Chuquet llama *regla de los números intermedios,* «La rigle des nombres moyens», para intercalar una fracción entre otras dos dadas. Chuquet enuncia la regla de la siguiente forma «Numerateur avec numerateur se adioustent et denoiater avec denoiateur. Cest a entendre que quant entre deux nombres entiers prochains lon veult trouver le premier moyen» (Marre, 1880: 101). En notación moderna, la regla dice que si tenemos dos fracciones $a/b < c/d$, entonces $(a+c)/(b+d)$ está comprendida entre ellas. Chuquet aplica entonces la regla de los números intermedios para obtener la solución de

$$x^2 + x = 39\,\frac{13}{81}.$$ [1]

Damos un esquema del proceso de Chuquet para resolver la ecuación (fig. 1).

1. Se obtienen, por comprobación directa, dos valores, uno menor que la solución real y otro mayor. En este caso, 5 y 6.
2. Como la solución está entre 5 y 6, la regla de los números intermedios da 11/2 como primera aproximación.
3. El valor del paso anterior divide [5,6] en dos subintervalos, uno de los cuales contiene la solución. Sustituyendo en la ecuación el valor del paso 2, se averigua qué subintervalo contiene la solución. Volviendo de nuevo al paso 2, se consigue otra aproximación. Repitiendo el proceso, se llega a la solución exacta, 52/9.

El método de Cardano

Los trabajos de Cardano (1501-1576) tuvieron una gran influencia en las matemáticas de su época. Su obra más importante es *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (1545), conocida como *Ars magna*. En ella, Cardano realiza una compilación de las técnicas conocidas para la resolución de ecuaciones polinómicas hasta el grado cuatro, estudia con detalle las ecuaciones y proporciona, por primera vez de manera impresa, las fórmulas por radicales para las ecuaciones de grados tres y cuatro.

En el capítulo XXX del *Ars Magna* da una regla general para resolver ecuaciones de forma numérica, que llamó *Regula Aurea* y que aplicó a las ecuaciones $x^4 + 3x^2 = 100$, $x^2 + 20 = 10x$, $x^3 + 6x = 20$ y $x^4 + 6x^2 + 200 = 10\,x^3 + 12x$. Cardano ve esta regla como un método general, y así dice «ratio

1. Chuquet enuncia la ecuación de la siguiente forma «trouver vng nombre tel que multiplie en soy et a la multiplicacion adiouste cellui nombre tout monte 39 $\frac{13}{81}$» (Marre 1880: 102).

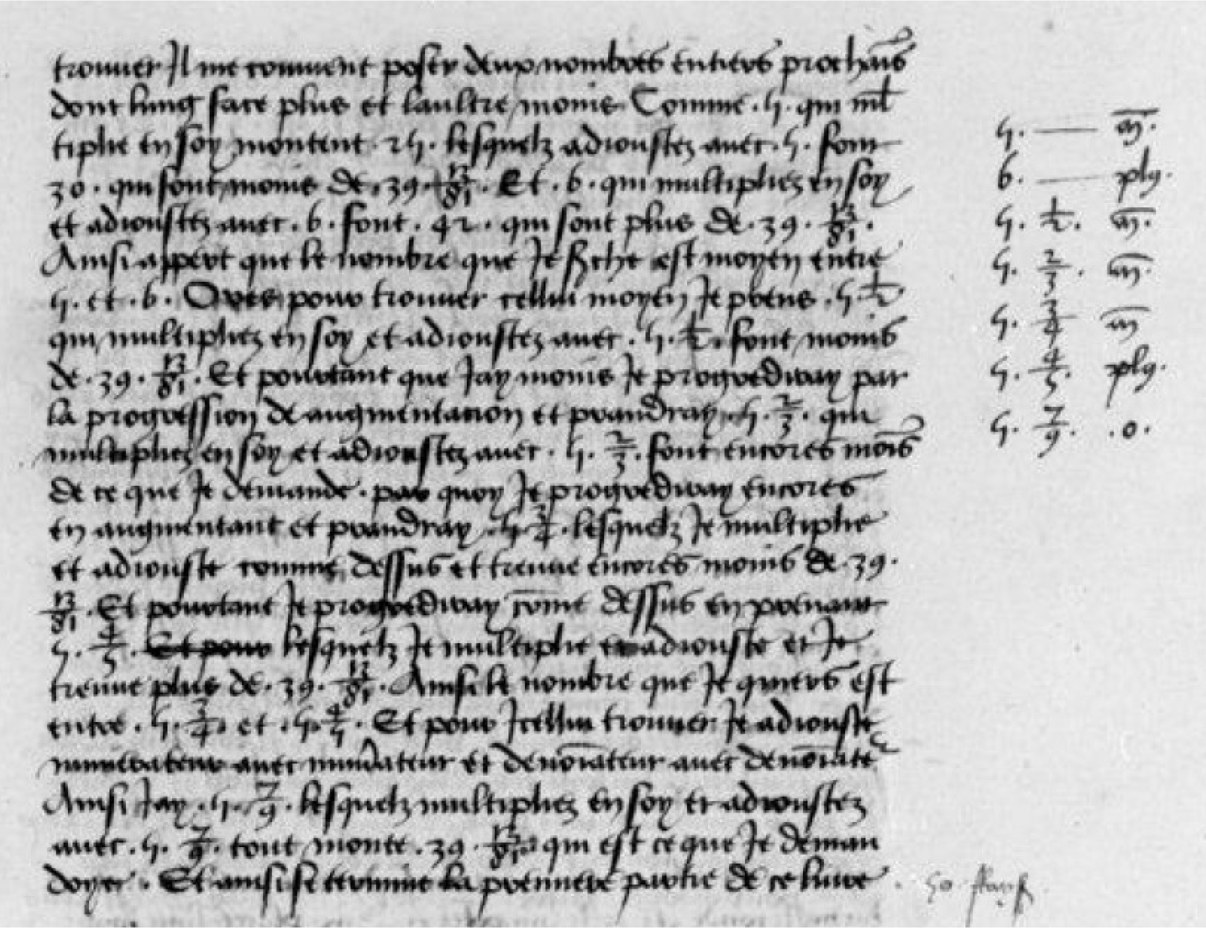


FIGURA. 1. La ecuación $x^2 + x = 39\frac{13}{81}$. en *Le Triparty* (1484) de Chuquet

haec universalis est, nec indiget alia regula» (Este procedimiento es de aplicación universal, y no necesita de otra regla) (Cardano, 1545: fol. 53 bis).

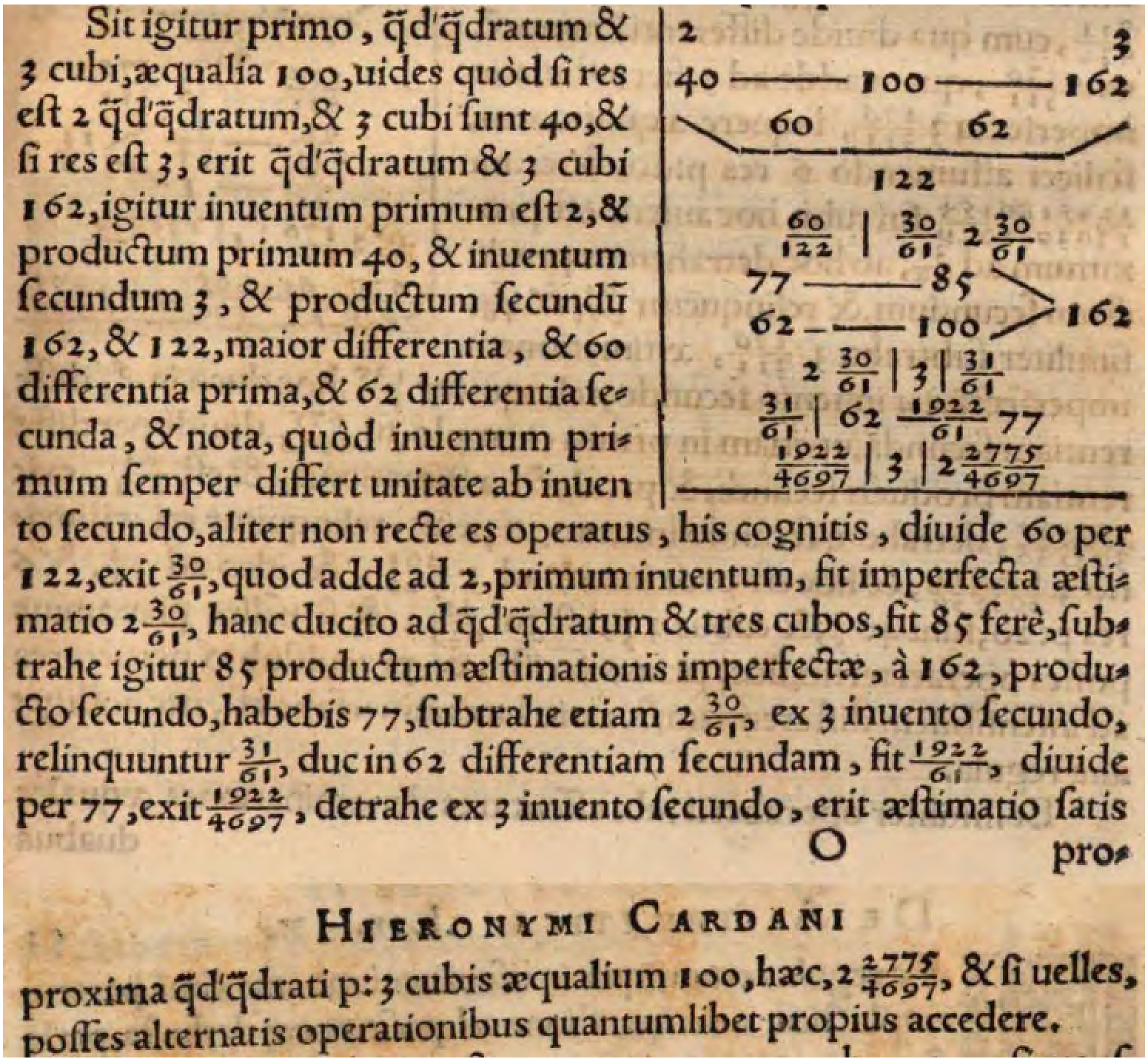
Veamos cómo resolvió $x^4 + 3x^2 = 100$. Explicamos el método en notación actual y de forma resumida, la forma original se puede ver completa en la figura 2. Si $P(x) = x^4 + 3x^2$, la ecuación se expresa como $P(x) = 100$. Al aplicar la regla, es necesario conocer previamente dos aproximaciones de la solución, una por exceso y otra por defecto. Estas dos aproximaciones las obtiene por sustitución directa, en este caso son 2 y 3. Cardano considera como primera aproximación la obtenida por defecto, es decir, $x_1 = 2$. Ahora, si llamamos $x_s \in [2,3]$ a la solución de la ecuación, y teniendo en cuenta que $P(2) = 40$, $P(3) = 162$, igualando proporciones obtiene la siguiente aproximación:

$$\frac{x_s - 2}{3-2} \approx \frac{100-40}{162-40} \Rightarrow x_s - 2 \approx (3-2)\cdot\frac{100-40}{162-40} \Rightarrow x_s \approx 2 + (3-2)\cdot\frac{100-40}{162-40} \Rightarrow x_2$$

La aproximación x_2 divide el intervalo de inicio [2,3] en $[2, x_2]$ y $[x_2, 3]$. Utiliza entonces el segundo subintervalo para obtener de la misma forma la siguiente aproximación.

En general, podemos obtener la aproximación como sigue:

2. Cardano escribe la ecuación de la forma «*q̄dq̄dratum* & 3 cubi, aequalia 100» (Cardano, 1545: fol. 53).



Sit igitur primo, q̃d'q̃dratum & 3 cubi, æqualia 100, uides quòd si res est 2 q̃d'q̃dratum, & 3 cubi sunt 40, & si res est 3, erit q̃d'q̃dratum & 3 cubi 162, igitur inuentum primum est 2, & productum primum 40, & inuentum secundum 3, & productum secundũ 162, & 122, maior differentia, & 60 differentia prima, & 62 differentia secunda, & nota, quòd inuentum primum semper differt unitate ab inuento secundo, aliter non recte es operatus, his cognitis, diuide 60 per 122, exit $\frac{30}{61}$, quod adde ad 2, primum inuentum, fit imperfecta æstimatio $2\frac{30}{61}$, hanc ducito ad q̃d'q̃dratum & tres cubos, fit 85 ferè, subtrahe igitur 85 productum æstimationis imperfectæ, à 162, producto secundo, habebis 77, subtrahe etiam $2\frac{30}{61}$, ex 3 inuento secundo, relinquuntur $\frac{31}{61}$, duc in 62 differentiam secundam, fit $\frac{1922}{61}$, diuide per 77, exit $\frac{1922}{4697}$, detrahe ex 3 inuento secundo, erit æstimatio satis

O pro-

HIERONYMI CARDANI

proxima q̃d'q̃drati p: 3 cubis æqualium 100, hæc, $2\frac{2775}{4697}$, & si uelles, posses alternatis operationibus quantumlibet propius accedere.

2 3
40 — 100 — 162
60 62
122
$\frac{60}{122}$ | $\frac{30}{61}$ $2\frac{30}{61}$
77 — 85
62 — 100 162
$2\frac{30}{61}$ | 3 | $\frac{31}{61}$
$\frac{31}{61}$ | 62 $\frac{1922}{61}$ 77
$\frac{1922}{4697}$ | 3 | $2\frac{2775}{4697}$

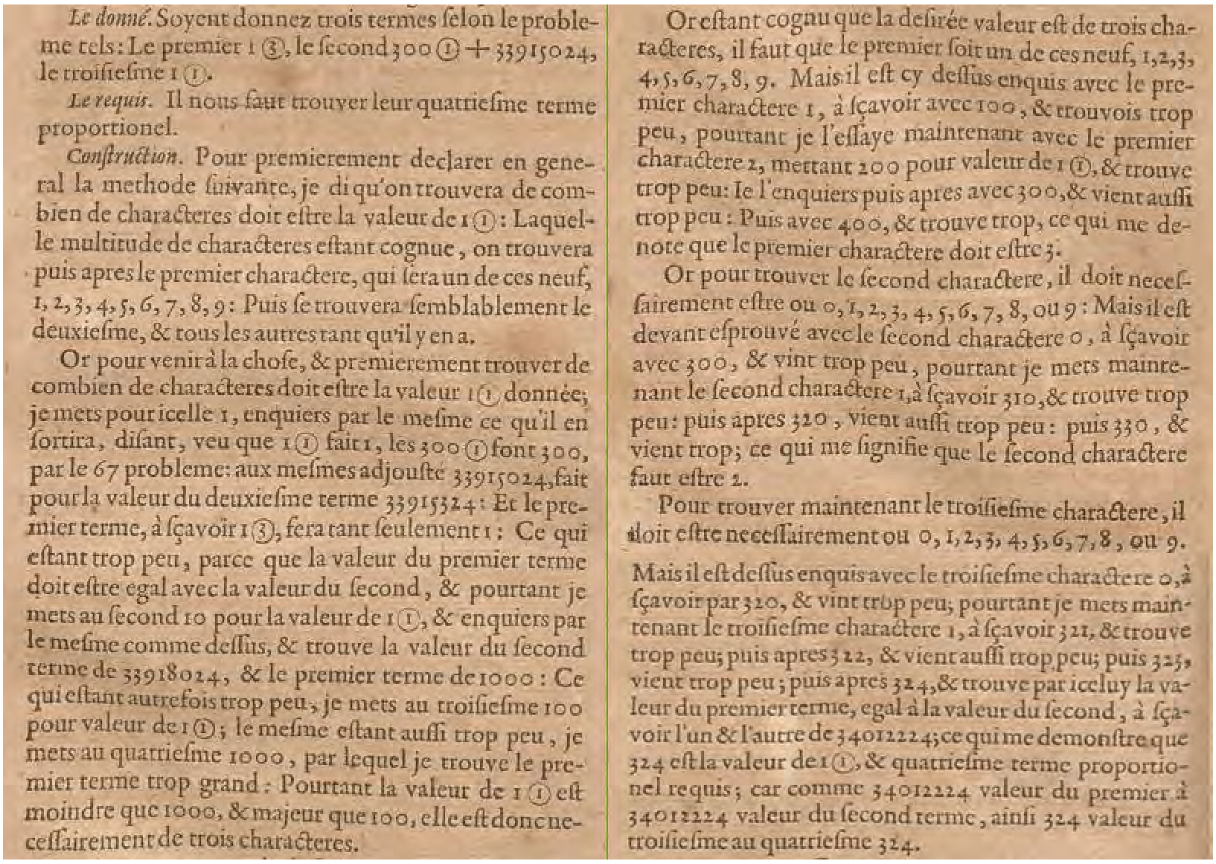
Figura. 2. La ecuación $x^4 + 3x^2$ en el *Ars Magna* de Cardano

Sea un $P(x)$ polinomio con coeficientes positivos y K un número racional positivo. Si $x_s > 0$ es solución de $P(x) = K$ y conocemos dos valores positivos p, q con $p < x_s < q$, la aproximación de Cardano x_n se obtiene mediante

$$x_n = p + (q - p) \cdot \frac{K - P(p)}{P(q) - P(p)}$$

El método de Stevin

Stevin nació en Brujas (Bélgica) en 1548. Una de sus mayores aportaciones reside en el trabajo sobre las fracciones decimales que publicó en 1585 en un libro de apenas 8 folios, con el título de *De Thiende*, en la versión flamenca, y *La disme*, en la versión francesa. Esta obra consta de dos partes. En la primera, establece los principios de su notación. Así, para escribir 2,71 Stevin coloca en un círculo los distintos órdenes de unidades, que sitúa encima o a la derecha de la cifra. Escribe 2 ⓪ 7 ① 1 ②, y lee 2 comienzos, 7 primeras, 1 segunda. En la segunda parte, explica cómo se realizan las cuatro operaciones aritméticas con los números decimales escritos de ese modo, subrayando las ventajas que supone la nueva notación.



Le donné. Soyent donnez trois termes ſelon le probleme tels: Le premier 1 ③, le ſecond 300 ① + 33915024, le troiſieſme 1 ①.

Le requis. Il nous faut trouver leur quatrieſme terme proportionel.

Conſtruction. Pour premierement declarer en general la methode ſuivante, je di qu'on trouvera de combien de characteres doit eſtre la valeur de 1 ①: Laquelle multitude de characteres eſtant cognue, on trouvera puis apres le premier charactere, qui ſera un de ces neuf, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: Puis ſe trouvera ſemblablement le deuxieſme, & tous les autres tant qu'il y en a.

Or pour venir à la choſe, & premierement trouver de combien de characteres doit eſtre la valeur 1 ① donnée; je mets pour icelle 1, enquiers par le meſme ce qu'il en ſortira, diſant, veu que 1 ① fait 1, les 300 ① font 300, par le 67 probleme: aux meſmes adjouſté 33915024, fait pour la valeur du deuxieſme terme 33915324: Et le premier terme, à ſçavoir 1 ③, ſera tant ſeulement 1; Ce qui eſtant trop peu, parce que la valeur du premier terme doit eſtre egal avec la valeur du ſecond, & pourtant je mets au ſecond 10 pour la valeur de 1 ①, & enquiers par le meſme comme deſſus, & trouve la valeur du ſecond terme de 33918024, & le premier terme de 1000: Ce qui eſtant autrefois trop peu, je mets au troiſieſme 100 pour valeur de 1 ①; le meſme eſtant auſſi trop peu, je mets au quatrieſme 1000, par lequel je trouve le premier terme trop grand: Pourtant la valeur de 1 ① eſt moindre que 1000, & majeur que 100, elle eſt donc neceſſairement de trois characteres.

Or eſtant cognu que la deſirée valeur eſt de trois characteres, il faut que le premier ſoit un de ces neuf, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mais il eſt cy deſſus enquis avec le premier charactere 1, à ſçavoir avec 100, & trouvois trop peu, pourtant je l'eſſaye maintenant avec le premier charactere 2, mettant 200 pour valeur de 1 ①, & trouve trop peu: Ie l'enquiers puis apres avec 300, & vient auſſi trop peu: Puis avec 400, & trouve trop, ce qui me denote que le premier charactere doit eſtre 3.

Or pour trouver le ſecond charactere, il doit neceſſairement eſtre ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9: Mais il eſt devant eſprouvé avec le ſecond charactere 0, à ſçavoir avec 300, & vint trop peu, pourtant je mets maintenant le ſecond charactere 1, à ſçavoir 310, & trouve trop peu: puis apres 320, vient auſſi trop peu: puis 330, & vient trop; ce qui me ſignifie que le ſecond charactere faut eſtre 2.

Pour trouver maintenant le troiſieſme charactere, il doit eſtre neceſſairement ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9. Mais il eſt deſſus enquis avec le troiſieſme charactere 0, à ſçavoir par 320, & vint trop peu; pourtant je mets maintenant le troiſieſme charactere 1, à ſçavoir 321, & trouve trop peu; puis apres 322, & vient auſſi trop peu; puis 323, vient trop peu; puis apres 324, & trouve par iceluy la valeur du premier terme, egal à la valeur du ſecond, à ſçavoir l'un & l'autre de 34012224; ce qui me demonſtre que 324 eſt la valeur de 1 ①, & quatrieſme terme proportionel requis; car comme 34012224 valeur du premier à 34012224 valeur du ſecond terme, ainſi 324 valeur du troiſieſme au quatrieſme 324.

FIGURA. 3. La ecuación $x^3 = 300x + 33\,915\,024$ en las obras de Simon Stevin editadas por Girard en 1634

Su método de resolución numérica de ecuaciones apareció en un panfleto publicado en 1594 bajo el título *Appendice Algébraique de Simon Stevin, de Bruges, contenant regle générale de toutes équations*. El único ejemplar original conocido se perdió en 1914, en un incendio de la biblioteca de la Universidad de Lovaina (Bélgica). Antes de su desaparición fue descrito por Gilbert (1859). Afortunadamente, aparece impresa en diferentes partes de la obra de Stevin, como en *L'Arithmétique* editada por Albert Girard en 1625 (Stevin, 1625: 351-355) y en las *Oeuvres* de Simon Stevin, editadas también por Girard en 1634 (Stevin, 1634: 88).

Veamos cómo resuelve $x^3 = 300x + 33\,915\,024$.[3] Stevin escribe la ecuación mediante términos proporcionales y trabaja con estas proporciones (Devreese & Vanden Berghe, 2008: 193-198). En lo que sigue, adaptamos el método a notación y procedimientos actuales con el fin de mostrar su potencial en el aula. El método se puede ver en su forma original en la figura 3. Si $P(x) = x^3 - 300x$, la ecuación se transforma en $P(x) = 33\,915\,024$. El proceso consiste en obtener, una a una, las cifras de la solución mediante los siguientes pasos.

1. Encontramos el número de cifras de la solución, calculando $P(10^n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ $P(100) < 33\,915\,024 < P(1000) \Rightarrow$ la solución tiene tres cifras.
   Ahora obtenemos, una a una, las cifras de la solución.

3. Stevin escribe la ecuación de la forma «Le donné. Soyent donnez trois termes selon le problema tels: Le premier 1③, le second 300 ① + 33915024, le troisiesme 1 . Le requis. Il nous faut trouver leur quatriesme terme proportional» (Stevin, 1625: 351)

2. $P(300) < 33\,915\,024 < P(400) \Rightarrow$ La primera cifra es 3.
3. $P(320) < 33\,915\,024 < P(330) \Rightarrow$ La segunda cifra es 2.
4. $P(324) < 33\,915\,024 \Rightarrow$ La tercera cifra es 4 y la solución es exacta e igual a 324.

Incluso cuando la solución es un número decimal, el proceso permite aproximarnos a ella tanto como deseemos. Así, Stevin propone en otro ejemplo la ecuación $x^3 = 300x + 33\,900\,000$, en la que la solución es un número decimal comprendido entre 323 y 324.

Actividades para el aula

1. *Actividades de contextualización*, en las que se pide elaborar biografías de los matemáticos, hechos relevantes de la época...
2. *Actividades sobre la notación*, en las que se muestra la forma en que los tres matemáticos escriben las ecuaciones y se pide transcribir otras ecuaciones de la notación actual a la usada por cada matemático.
3. *Actividades de resolución de ecuaciones*, en las que después de mostrar el método de resolución de cada matemático, se pide obtener la solución de otras ecuaciones, no «preparadas» y no necesariamente polinómicas, mediante cada método.
4. *Actividades de comparación de métodos*, en las que se pide comparar la velocidad de convergencia de los tres métodos y analizar los errores cometidos en las aproximaciones.
5. *Actividades de programación*, en las que se pide programar los tres métodos. Se usará un lenguaje de programación de acceso libre (Python, Maxima...).

Conclusiones

La inclusión de métodos numéricos en la enseñanza media es importante para complementar los métodos algebraicos de resolución de ecuaciones. La historia de las matemáticas nos ofrece recursos para introducir el tema de forma atractiva, mostrándonos una perspectiva de la génesis y evolución de dichos métodos, enriqueciendo de este modo la cultura matemática y general de alumno y profesor. Además, nos proporciona la posibilidad de hacer ver a los alumnos la evolución de la notación algebraica en esta época, hecho absolutamente decisivo en la rápida y potente evolución de las matemáticas en el siglo XVII. Y nos enseña que son compatibles con el fomento de las nuevas tecnologías en el aula mediante la programación de los diferentes métodos.

Agradecimientos

Agradecemos la financiación y apoyo del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia.

Referencias bibliográficas

CARDANO, G. (1545), *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis,* Núremberg, Petreius.

CARM (2015), Decretos nº 220/2015 y nº 221/2015, de 2 de septiembre de 2015, por los que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, BORM 3/10/2015, Murcia, Boletín Oficial de la Región de Murcia.

CHUQUET, N. (1484), *Triparty en la science des nombres*, Paris, Lyon, BNF, ms fds fr. 1346.

DEVREESE, J. T.; VANDEN BERGHE, G. (2008), *Magic is No Magic The Wonderful World of Simon Stevin,* Southampton, Wit press.

FAUVEL, J. ; MAANEN, J. V. (2000), *History in mathematics education: the ICMI study,* Dordrecht, Kluwer.

FLEGG, G.; HAY, C.; MOSS, B. (1985), *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician,* Dordrecht, D. Reidel Publishing Company.

GILBERT, P. (1859), «Note sur un opuscule peu connu de Simon Stevin de Bruges. Lettre a M. Ad. Quetelet», *Revue Catholique*, 8, 192-197.

KATZ, V. ; TZANAKIS, C. (2011), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education,* Mathematical Association of America, MAA Notes series 78.

MARRE, A. (1880), «Le Triparty en la science des nombres: publié d'après le manuscrit fonds français n° 1346 de la Bibliothèque nationale de Paris par maistre Nicolas Chuquet Parisien et précédé d'une Notice par M. Aristide Marre», *Extrait du Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche,* 13 (obra original 1484).

MASSA-ESTEVE, M. (2014), «Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's Nova Scientia (1537)», *Teaching Innovations*, 27, 114-126.

NORGAARD, M. (1922), *A historical survey of algebraic methods of approximating the roots of numerical higher equations up to the year 1819*, Nova York, Teachers College Columbia University.

STEVIN, S. (1625), *L'Arithmétique,* GIRARD, A. (ed.), Leiden, Elzeviers.

STEVIN, S. (1634), *Les oeuvres mathematiques,* GIRARD, A. (ed.), Leiden, Elzeviers.